Formule sommatoire de Poisson. (2)

Thm : Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+2n\pi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) e^{-inx}.$$

Puisque $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, pour $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$, $\exists M > 0$, $\forall |x| \geq 1$, $|f(x)| \leq \frac{M}{x^2}$.

Donc $\forall K > 0$, $\forall x \in [-K, K]$, $|n| > K+1 \Rightarrow |f(x+2n\pi)| \leq \frac{M}{(x+2n\pi)^2} \leq \frac{M}{(2|n|\pi - K)^2}$.

Donc $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(\cdot + 2n\pi)$ cvn sur tout compact.

Le même raisonnement s'applique à f' et $F : x \mapsto 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+2n\pi)$ est $\mathcal{C}^1$, $F'(x) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f'(x+2n\pi)$

De plus, si $N \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=-N}^{N} f(x+2\pi+2n\pi) = \sum_{n=-N+1}^{N+1} f(x+2n\pi)$ donc F est 2π-périodique

De là, F est égale à sa somme de Fourier : $F(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(F) e^{inx}$

avec $c_N(F) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(t) e^{-iNt} dt \underset{\text{cvn}}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} f(t+2n\pi) e^{-iNt} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iNt} e^{-i2n\pi N} dt$
$= \hat{f}(N)$

car $f(t) \underset{\pm\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

Finalement, $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) e^{inx}$

Cor : $\forall s > 0$, $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 s} = \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2/s}$, i.e. $\sqrt{s}\,\Theta(s) = \Theta(1/s)$.

Soit $f_\alpha : x \mapsto e^{-\alpha x^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

$\hat{f}(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t^2} e^{+int} dt = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} e^{-in\, u/\sqrt{\alpha}} du = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} I(n)$

où $I(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} e^{-ix\, u/\sqrt{\alpha}} du = \int_{\mathbb{R}} h(x,u) du$

- h est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x,\cdot) \in L^1(\mathbb{R})$ car $o\left(\frac{1}{u^2}\right)$ en $\pm\infty$.
- $\left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,u)\right| = \left|-i\frac{u}{\sqrt{\alpha}} e^{-u^2} e^{-ix\, u/\sqrt{\alpha}}\right| \leq \frac{u}{\sqrt{\alpha}} e^{-u^2}$ dans $L^1(\mathbb{R})$.

Donc par dérivation sous l'intégrale : $I'(x) = \frac{-i}{\sqrt{\alpha}} \int_{\mathbb{R}} u e^{-u^2} e^{-ix\, u/\sqrt{\alpha}} du$.

Or $I(x) = \left[e^{-u^2} \frac{e^{-ix\, u/\sqrt{\alpha}}}{-ix/\sqrt{\alpha}} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{-ix/\sqrt{\alpha}} \int_{\mathbb{R}} 2u e^{-u^2} e^{-ix\, u/\sqrt{\alpha}} du = \frac{-2\alpha I'(x)}{x}$

Donc $I'(x) = \frac{-x}{2\alpha} I(x)$, i.e. $I(x) = I(0) e^{-x^2/4\alpha} = \sqrt{\pi}\, e^{-x^2/4\alpha}$.

puis $\hat{f}(n) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-n^2/4\alpha}$. Par Poisson en 0 : $2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha 4 n^2 \pi^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n^2/4\alpha}$

Pour $\alpha = \frac{s}{4\pi}$, $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 s} = \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2/s}$.